

Questions de cours

- produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{vmatrix}$
- $zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa' + ia'b' + ia'b - bb'$
 $= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
partie réelle partie complexe
- intégration par partie $\int u dv = uv - \int v du$

Intégration par chgt de variables

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad \begin{array}{l} x = \cos \theta \\ dx = -\sin \theta d\theta \end{array}$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}/2} -u^2 du = \frac{4-\sqrt{2}}{12}$$

$$B = \int_0^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2t^2+1} dt \quad \begin{array}{l} u = \sqrt{2}t \\ du = \sqrt{2} dt \end{array}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}x} \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$$

Equations différentielles

$$2y'' + 3y' - 2y = 0 \quad \text{eq homogène}$$

$$\text{avec } y = Ae^{rt} \Rightarrow \text{eq caract } 2r^2 + 3r - 2 = 0$$

$$\text{donc solution } y(t) = a e^{-2t} + b e^{t/2}; \quad r = 1/2 \text{ ou } r = -2$$

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$\text{avec } y = t e^{rt} \Rightarrow \text{eq caract } r^2 - 2r + 10 = 0$$

$$\text{donc solution } y(t) = a e^{(1+3j)t} + b e^{(1-3j)t} \quad \begin{array}{l} r = 1+3j \text{ ou } r = 1-3j \end{array}$$

$$= e^t (a e^{3jt} + b e^{-3jt}) = e^t (A \cos 3t + B \sin 3t)$$

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = -g \quad (E),$$

où g est la constante de gravité.

1. On cherche une solution constante de (E), disons $z(t) = C \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a bien $z''(t) = 0 = z'(t)$ et l'équation (E) devient

$$kC = -g \Leftrightarrow C = \frac{-g}{k}$$

Interprétation physique. Selon l'énoncé, $z = 0$ est la position du poids quand le ressort est non détendu. Lorsque l'on accroche la masse au ressort et on le laisse en repos, le ressort sera un peu détendu vers le sol. Donc le poids n'est plus en position $z = 0$, mais plus bas. Cette position (d'équilibre) dépend de la force de la gravité $-g$ et de la constante de raideur k (ici le signe négatif de la constante de gravité et donc de la position C veut dire que la force gravité tire du poids vers le bas)

2. L'équation homogène associée à (E) est donnée par $z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = 0$. Les solutions à cette équation sont calculées dans le poly du cours (voir paragraphe 3 du Chapitre 2). Puisque l'on suppose $\mu \ll k$, la solution est donnée par

$$z_H(t) = (c_1 \cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{k-\mu^2}))e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dans la question (1) ci-dessus on a trouvé la solution particulière constante $z_p(t) = C = \frac{-g}{k}$. Toutes les solutions à l'équation (E) sont alors de la forme

$$z_G(t) = z_p(t) + z_H(t) = \frac{-g}{k} + (c_1 \cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{k-\mu^2}))e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Note. La dérivée de $z_G(t)$ est donnée par

$$z'_G(t) = ((c_2 \sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1) \cos(t\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1 \sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2) \sin(t\sqrt{k-\mu^2}))e^{-\mu t}$$

On se donne maintenant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. Dans ce cas, la solution de (E) est unique. Pour la calculer il faut calculer les constantes c_1, c_2 pour que les conditions $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ soient satisfaites.

$$z(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + (c_1 \cos(0\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 \sin(0\sqrt{k-\mu^2}))e^{-\mu \cdot 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{g}{k}$$

$$z'(0) = 0 \Leftrightarrow ((c_2 \sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1) \cos(0\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1 \sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2) \sin(0\sqrt{k-\mu^2}))e^{-\mu \cdot 0} = 0 \Leftrightarrow c_2 \sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 = \frac{\mu c_1}{\sqrt{k-\mu^2}} = \frac{\mu g}{k \sqrt{k-\mu^2}}$$

Donc la seule solution $z(t)$ de (E) telle que $z(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est donné par

$$z(t) = \frac{-g}{k} + \left(\frac{g}{k} \cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + \frac{\mu g}{k \sqrt{k-\mu^2}} \sin(t\sqrt{k-\mu^2}) \right) e^{-\mu t}$$

Interprétation physique. D'une part, la présence des fonctions cosinus et sinus dans la solution de l'équation (E) indique que la trajectoire du poids est périodique. D'autre part, la présence de la fonction exponentielle $e^{-\mu t}$ comme facteur avec exposant négatif indique que le mouvement du poids s'affaiblit au fil du temps. Plus précisément, on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{-g}{k},$$

c'est à dire, le poids tend à se stabiliser à la position initiale lorsqu'il est en repos et accroché au ressort (comparer avec l'interprétation physique de la question (1)).